Pubblicato in: Sbaragli S. (2011). Introduzione. In: Cottino L., Dal Corso E., Francini M., Gualandi C., Nobis C., Ponti A., Ricci M., Sbaragli S., Zola L. (2011). *Misura*. Progetto: Matematica nella scuola primaria, percorsi per apprendere. Bologna: Pitagora. 1-24.

Introduzione

Silvia Sbaragli

1. Scienze sperimentali e matematica

La *misura* rappresenta un tema di primaria importanza nelle scienze sperimentali e nell'àmbito della matematica, dato che permette di comprendere come si passa da un fenomeno del mondo reale alle grandezze numeriche che lo descrivono. Con "misura" possiamo intendere il procedimento fisico con cui si confronta una grandezza incognita con un'appropriata unità di misura, giungendo ad un valore numerico che dà informazioni quantitative sull'entità di tale grandezza incognita.

Oltre all'aspetto numerico, le scienze sperimentali e la matematica si integrano anche in campo geometrico: le grandezze fisiche trovano un equivalente in questo àmbito disciplinare tramite vari strumenti culturali; ad esempio, i vettori rappresentano descrittori quantitativi di grandezze legate all'orientamento spaziale; ma si può ricorrere anche a vari modelli geometrici di oggetti reali.

Le scienze sperimentali hanno l'obiettivo di descrivere, interpretare e prevedere il comportamento del mondo reale, mentre la matematica ha come criterio essenziale di validità la correttezza formale del ragionamento, la coerenza di un sistema formale, il rispetto di certe "regole" che vengono fissate a priori.

La matematica risulta quindi fondamentale per dare forza agli aspetti interpretativi e concettuali allo scopo di mostrare il rapporto tra teoria e mondo reale.

In questa ottica, afferma Giuseppe Peano (1894, p. 141): «Certo è permesso a chiunque di premettere quelle ipotesi che vuole, e sviluppare le conseguenze logiche contenute in quelle ipotesi. Ma affinché questo lavoro meriti il nome di Geometria, bisogna che quelle ipotesi o postulati esprimano il risultato delle osservazioni più semplici ed elementari delle figure fisiche».

Una lunga tradizione iniziata nell'antichità come "misura della terra" e rafforzata con gli *Elementi* di Euclide, ci tramanda una geo-metria (appunto) fortemente radicata nell'esperienza; ma il dibattito nella storia della matematica su questo aspetto si fa acceso a partire dalla *Crisi dei Fondamenti* avvenuta a cavallo tra il XIX ed il XX secolo. In questo àmbito, Henri Poincaré distingue tra lo spazio fisico nel quale avvengono le nostre esperienze e quello geometrico astratto ed ideale: «[…] i principi della geometria non sono dei fatti sperimentali […] È chiaro che l'esperienza gioca un ruolo insostituibile nella genesi della geometria: ma sarebbe un errore concludere che la geometria è una scienza sperimentale, anche solo in parte» (Poincaré, 1902, p. 90-92). Ancora più incisiva è la scelta di David Hilbert nelle *Grundlagen der Geometrie*, che segnano un vero e proprio momento di svolta, tagliando di fatto il legame tra la geometria e la realtà. La geometria diventa così una disciplina sempre più affrancata da ogni riferimento al reale. L'aspetto fondamentale diventa il problema della coerenza di un sistema formale: un sistema di assiomi dovrà essere coerente, ovvero non contradditorio, e questa è la sola condizione logica richiesta per l'esistenza degli oggetti matematici definiti da esso. Che cosa intendere poi con "non contraddittorio" è motivo ancora oggi di lungo dibattito epistemologico e di costante studio…

Dal punto di vista didattico, però, soprattutto pensando alla scuola primaria, il rapporto tra intuizioni legate all'esperienza, concetti e ragionamenti geometrici, resta un elemento importante da non sottovalutare; la misura può rappresentare un ottimo campo di riflessione in quest'ottica. Come afferma Juan Godino (2002): «In ciascun aspetto del significato sistemico e praxeologico della misura appare la dialettica pratiche-logos. Per esempio, per comprendere che cosa si misura è necessario entrare in contatto con (percepire) gli oggetti del mondo esterno, fare attività di classificazione e comparazione. È necessario coinvolgere situazioni di comunicazione sulla grandezza delle collezioni e sulla ricerca delle relazioni tra le quantità. Questo a sua volta ci conduce all'individuazione delle relazioni o dei termini di confronto (unità di misura) e allo sviluppo delle tecniche di misura, che devono essere dominate e comprese. Questi elementi configurano una praxeologia empirica della misura. Però vedremo anche che questo sistema di pratiche operative e discorsive di natura empirica è strettamente relazionato con altre praxeologie matematiche che facilitano o rendono possibile la realizzazione dei compiti».

Quando osserviamo il mondo reale, sfruttiamo principalmente gli occhi che ci danno informazioni spaziali sulla forma, la grandezza, la posizione… degli oggetti analizzati, ma il "vedere" porta spesso in errore se non c'è consapevolezza concettuale.

Occorre abituarsi ad armonizzare l'idealità (astrattezza) delle figure geometriche ed il loro rapporto con gli oggetti della realtà empirica. Tramite la geometria, diamo un'interpretazione delle rappresentazioni spaziali e delle relazioni tra i vari enti considerati, ma nella visione geometrica non ci si preoccupa se il disegno considerato è effettivamente un triangolo rettangolo come richiesto dal problema, oppure no, o come abbiamo fatto a misurarlo e a saperlo; ciò che importa sono le caratteristiche astratte dell'ente dichiarate e quali sono le conseguenze che se ne possono dedurre; in geometria la realtà viene quindi completamente sostituita da rappresentazioni mentali e da affermazioni proposizionali.
Un quadrato, in termini geometrici, non è l'immagine di un oggetto reale – anche se può essere legato a qualche oggetto reale, per esempio ad un opportuno foglio di carta – ma condivide con esso quelle proprietà che sono determinate dalla sua definizione; lo dice bene Efraim Fischbein (1993): «I punti (oggetto zero-dimensionali), le linee (oggetti uno-dimensionali), i piani (oggetti bi-dimensionali) non esistono, non possono esistere nella realtà. (…) Questi sono costrutti mentali puri e semplici che si suppone non possiedano alcuna realtà sostanziale. (…) Le proprietà delle figure geometriche sono imposte o derivate dalle definizioni (sebbene possano essere ispirate da oggetti reali). Un quadrato è un rettangolo avente i lati uguali. Partendo da queste proprietà si può andare avanti per scoprire le altre proprietà del quadrato».
La fisica adatta alle proprie specifiche esigenze i metodi della geometria, ma in fisica ci si occupa di oggetti reali, che possono richiamare ad esempio triangoli rettangoli o quadrati, ma non lo sono certamente, dato che le figure, tutte le figure della geometria, sono astrazioni matematiche: per esempio hanno due sole dimensioni, cosa impossibile nel reale.
Il richiamo agli aspetti pratici delle scienze sperimentali può portare in errore in àmbito geometrico e lasciare in ombra il fatto che questa disciplina riguarda verità eterne e universali. Occorre una grande sensibilità didattica per favorire il necessario connubio tra realtà e matematica; l'uso di modelli concreti può fornire un supporto efficace alle intuizioni matematiche, ma in certi casi può addirittura trasformarsi in ostacolo per la costruzione del sapere (Maier, 1993, 1998). Come sostengono D'Amore, Fandiño Pinilla, Marazzani e Sbaragli (2008, p. 117): «Occorre riflettere bene sul senso profondo della differenza che c'è tra scienze empiriche e matematica; va bene usare modelli concreti degli oggetti matematici, ovviamente, non se ne può fare a meno, ai primi livelli di scolarità; ma demandare a questi modelli la concettualizzazione è certamente il primo passo verso difficoltà nelle quali costringiamo gli allievi. Perché far loro credere che l'oggetto concreto sia il concetto?, che il modello empirico sia l'oggetto matematico? Perché non dirlo esplicitamente che c'è una differenza abissale? Perché non problematizzare la questione? In nome di una semplificazione e di una sicurezza che si vuol dare allo studente, in realtà, lo si obbliga a navigare a

vista in un mare irto di scogli pronti a far arenare la nave della costruzione concettuale».
Geometria e ragionamento spaziale risultano essere quindi due àmbiti di riflessione distinti: il ragionamento spaziale, e più in generale le abilità spaziali, si riferiscono a gran parte del nostro adattamento alla realtà del mondo fisico nel quale viviamo; invece, come abbiamo già rilevato, non avviene altrettanto per la geometria. Nella teoria evolutiva elaborata dai coniugi van Hiele (1986) viene proprio perciò distinta la geometria come concettualizzazione dello spazio dalla geometria come teoria formale. L'ultimo livello dello sviluppo consisterà nella capacità di muoversi all'interno di un sistema ipotetico deduttivo, ovvero all'interno di una data assiomatica.
Il rapporto tra geometria e mondo fisico rimane in ogni caso molto stretto: occorre dal punto di vista didattico un buon connubio tra l'esperienza fisica e la concettualizzazione matematica.

2. Le grandezze, i campioni, le unità di misura

Se le misure di una figura non sono più solo nostre ipotesi fissate a priori in un mondo geometrico, ma dipendono da oggetti reali, risulta importante sapere come determinarle. Di solito si usa un campione convenzionale, o non, e lo si confronta con l'oggetto da misurare.
Più in generale, gli elementi fondamentali delle scienze sperimentali, in particolare della fisica, sono le *grandezze*, in termine delle quali vengono espresse le sue leggi.
Si è stabilita una grandezza quando abbiamo stabilito un procedimento o, se si preferisce, un insieme di norme, atte a misurare tale grandezza e ad assegnarle un'*unità di misura*. In altre parole si sceglie per essa un *campione*. Il procedimento è del tutto arbitrario, ma ciò che risulta importante è che venga definito secondo criteri di utilità e di praticità. Ciò che occorre fare è scegliere, tra tutte le possibili grandezze, un limitato numero dette fondamentali e far derivare da esse tutte le altre.
Successivamente vengono assegnati dei campioni a ciascuna di queste grandezze fondamentali (non alle altre). Una volta scelto un campione fondamentale, come per esempio di lunghezza, dobbiamo anche stabilire dei procedimenti che consentano di misurare la lunghezza di un oggetto qualsiasi per confronto con il campione. Questo significa che il campione deve essere *accessibile* e *invariabile*, ossia è auspicabile di poter ricevere entro limiti accettabili la stessa risposta tutte le volte che confrontiamo il campione con un dato oggetto. Questi due requisiti sono spesso incompatibili. Ad esempio, se scegliamo come campione di lunghezza la distanza tra il naso di un uomo e la punta delle dita del suo braccio disteso,

questo è sicuramente accessibile ma non invariabile, cambiando da persona a persona (tale unità di lunghezza è comunque parte della storia dell'uomo ed è detta *iarda*).

3. L'approccio didattico alla misura degli oggetti reali

Come si può rilevare da queste poche pagine, il tema della misura è di grande ampiezza e varietà. Maria del Carmen Chamorro (1997), in accordo con le idee e gli studi di Guy Brousseau, ha evidenziato l'esistenza di otto aspetti distinti, denominati "intorni", messi in evidenza da: oggetto supporto, grandezza, valore particolare o quantità di grandezza, applicazione misura, misura immagine, misura concreta, misurazione, ordine di grandezza. Questo dettagliato e sottile elenco mette in evidenza la complessità del processo di misura, specie per quanto concerne il suo apprendimento.
Nella scuola primaria, la descrizione di proprietà o grandezze riferite a oggetti e fenomeni reali può essere realizzata in due modi:
descrizione mediante l'uso del linguaggio parlato: momento che chiameremo, per intenderci, del "confronto qualitativo";
descrizione aritmetica: misurazione, che diventa un "confronto quantitativo".
La prima attività risulta più immediata ma anche più limitata, in quanto permette di descrivere aspetti "qualitativi" e solo in parte aspetti "quantitativi". Inizialmente viene effettuata in modo percettivo e sensoriale su singoli oggetti tramite descrizione di proprietà.
Per esempio, per descrivere la statura di una persona si possono usare termini quali: alto, basso, di statura media... Si vede come il vocabolario fornisca una serie limitata di termini, i quali, inoltre, sono assai approssimativi, relativi e soggettivi. Per rendere assolute queste considerazioni occorre confrontare l'oggetto considerato con uno o più campioni, facendo così considerazioni del tipo: «Questa persona è più alta di questa, è più bassa di quella…». Nel confronto tra vari oggetti, si analizzano proprietà osservandone analogie e differenze (Sbaragli et al., 2008); tale confronto può avvenire in modo diretto, paragonando gli oggetti tra loro o, se ciò non è possibile, nasce la necessità di usare un *medio termine arbitrario,* ossia un termine utilizzabile per confrontare entrambi gli elementi da paragonare. Ad esempio, nel gioco delle bocce, per verificare quale boccia risulta più vicina al "pallino-meta" occorre utilizzare un medio termine, non avendo la possibilità di confrontare direttamente le due distanze tra loro; questo medio termine è dato di solito da due aste che si collocano alla distanza coincidente con quella che c'è tra il "pallino" e una boccia delle due bocce da valutare; tale distanza viene poi confrontata con

quella individuata dall'altra boccia rispetto al pallino; la boccia che si avvicina di più al pallino guadagnerà il punto.
Se l'uso di un medio termine o di vari oggetti risulta complicato, si passa dal confronto alla misurazione. Si stabilisce una prima corrispondenza fra oggetti e numeri usando un'unità di misura arbitraria e passando poi al sistema di misurazione convenzionale.
Il passaggio dalla prima modalità alla seconda avviene quando si presenta la necessità di descrivere con una certa precisione "l'intensità" di un fenomeno o la grandezza di un oggetto.
Risulta inoltre interessante allenare l'occhio alla stima quantitativa, basata ovviamente sul vissuto personale degli allievi formatosi da precedenti esperienze di misurazioni: «Quanto dista da noi la gomma, la lavagna, l'automobile della maestra? Quanti di questi fogli stanno su questo tavolo o sul pavimento? Quanti di questi cubetti sono contenuti in questa scatola?». Sono domande possibili per le quali prima si fa una previsione e poi una verifica.
Lavorare tramite la stima implica necessariamente partire da situazioni provenienti dalla realtà, prendendo dati reali e verosimili che permettono all'allievo di acquisire l'ordine di grandezza, con i quali confrontare il risultato delle stime. La determinazione da parte dell'allievo dell'ordine di grandezza degli oggetti reali, può essere conseguita solo attraverso l'esperienza che egli ha acquisito tramite le misurazioni realizzate in maniera effettiva.
Nell'effettuare il controllo della misura per verificare chi si è avvicinato di più con la propria ipotesi, occorre ricordare che in qualsiasi operazione di misura è insensato cercare la precisione assoluta, dato che essa non esiste. Occorre invece sapere qual è il margine di incertezza che possiamo tollerare in base all'uso che faremo di quella misura e scegliere gli strumenti e le tecniche che ci consentono di effettuare la misura con l'accuratezza richiesta.
Tutto ciò dipende dal contesto, rispetto al quale dobbiamo tener conto dei seguenti aspetti:
chiederci qual è il margine di incertezza che possiamo tollerare senza pregiudicare le nostre analisi;
valutare il problema reale e stimare se possiamo descrivere l'oggetto in questione come se fosse un ente definito e semplice, rimanendo nei limiti del margine di incertezza fissata;
scegliere uno strumento di misura che ci consenta di misurare le caratteristiche volute dell'oggetto considerato e di farlo con una certa precisione sufficiente ai nostri scopi.
In generale, occorre essere critici nei confronti delle diverse alternative possibili, allo scopo di orientare la scelta verso lo strumento più semplice come uso, che richiede meno tempo di esecuzione, meno calcoli, meno rischio di errori.

Didatticamente è anche importante dare rilievo ai problemi di conservazione della grandezza, mettendo in evidenza che la forma degli oggetti non determina l'area o il volume degli oggetti,[1] o che la maggiore voluminosità non corrisponde necessariamente a maggiore massa, o che a maggiore perimetro non corrisponde per forza maggiore area e viceversa (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2006) o che a maggiore area non corrisponde per forza maggiore volume e viceversa (Sbaragli, 2006)… o, più in generale, che gli indicatori percettivi talvolta sono fuorvianti nella valutazione della grandezza.

(1979) Omaggio a Piaget

[1] Argomento messo classicamente in evidenza dagli studi di Jean Piaget (Piaget, Inhelder, 1971; Piaget, Inhelder, Szeminska, 1976).

Non bisogna infatti sottovalutare che troppo spesso le cause di difficoltà degli allievi su questo argomento sono da imputare a cause di natura didattica e non solo epistemologica, come ha messo bene in evidenza Chamorro nelle sue ricerche su questo tema (1997; 2001-2002). Anche Godino (2002), nei risultati di una ricerca eseguita con studenti in formazione per diventare futuri insegnanti di scuola primaria, mette in evidenza la confusione concettuale su questo tema, confondendo la grandezza con l'unità di misura, la quantità con il valore numerico della misura.

4. La misura in matematica

In matematica una misura è rappresentata da un numero reale positivo.[2] In termini più formali, questo si traduce nel fissare:
un insieme U di grandezze;
una relazione di equivalenza *R* (riflessiva, simmetrica e transitiva) definita in U;
una partizione di U generata da tale relazione di equivalenza *R* definita in U: $U/R = \{A_1; A_2; A_3; \ldots; A_i; \ldots\}$.
La misura delle grandezze in U è quindi una funzione:

$\mu: U/R \rightarrow \square\ [0;+\infty[$

$\quad A_n \rightarrow \mu(A_n)$

tale che:

$\mu(A) \in [0;+\infty[\quad$ “$A \in U/R$

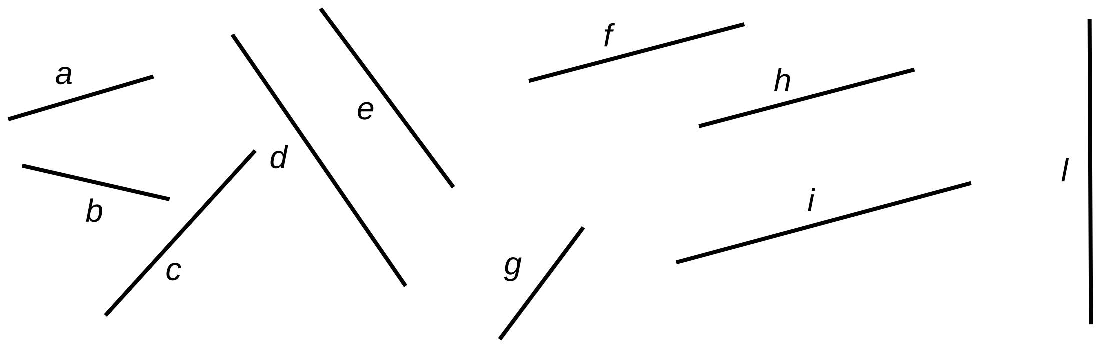
$\mu(\varnothing) = 0$

$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ se $A \cap B = \varnothing$

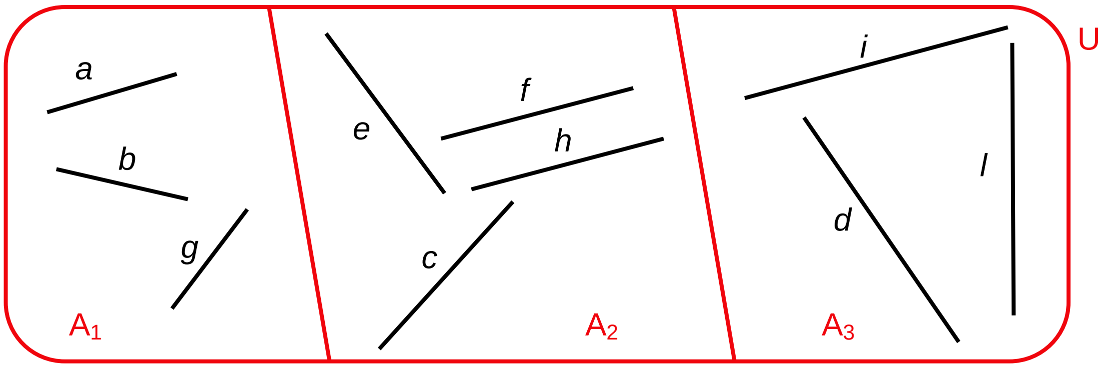
$\mu(A) \leq \mu(B)$ se $A \subseteq B$

Mostriamo un esempio. Consideriamo un insieme U di segmenti

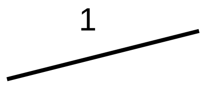
[2] In fisica, tuttavia, si usano solo numeri razionali, poiché ogni misura contiene un'incertezza che si esprime matematicamente con un'approssimazione.



nel quale definiamo la seguente relazione:
a R b $\Leftrightarrow$ a ha la stessa lunghezza di b;
essa è una relazione di equivalenza che possiamo applicare a U sfruttando il "confronto diretto" fra i suoi elementi.
R determina in U una partizione che possiamo rappresentare nel seguente modo:

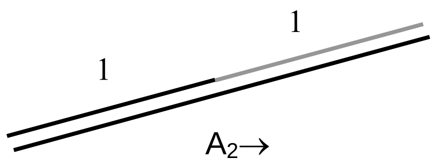


Possiamo dire che U è stato "suddiviso" da R in 3 sottoinsiemi che sono le classi di equivalenza che R ha creato in U; si scrive: U/R = {A_1; A_2; A_3}.
Possiamo poi scegliere arbitrariamente di associare a uno dei sottoinsiemi ottenuti (ad esempio A_1) il valore 1.
Ognuno dei rappresentati di A_1, cioè qualsiasi suo segmento, può ora essere utilizzato come unità di misura.

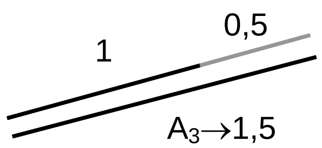


Dunque, tutti i segmenti di A_1 misurano per convenzione 1.

Per conoscere la misura di un qualsiasi segmento di un’altra classe occorre determinare, tramite una operazione fittizia che in genere viene idealizzata con il cosiddetto “trasporto di un segmento sull’altro” (ma, ovviamente, è solo un modo di dire, una metafora tratta dalla vita reale), quante volte il segmento-unità è contenuto nel segmento da misurare. Per esempio, supponiamo che il segmento-unità sia contenuto 2 volte in un qualsiasi segmento di A_2; si dice allora che i segmenti di A_2 misurano 2.



Allo stesso modo possiamo determinare la lunghezza di un qualsiasi segmento di A_3. Occorrerà però talvolta definire dei sottomultipli dell’unità; per fare ciò conviene sfruttare il sistema di numerazione decimale, dividendo idealmente il segmento-unità in 10 segmenti di ugual lunghezza, la decima parte della unità.



Nel nostro esempio ogni segmento di A_3 misura una unità e mezzo, dunque la si esprime dicendo che misura 1,5.
Casi analoghi sono di solito perfettamente comprensibili.
Fatta questa scelta nel definire il concetto di misura in matematica, ci sono espressioni più o meno coerenti con essa. Ad esempio, sono misure in senso stretto: l’8 nell’espressione “la lunghezza del lato AB è 8 cm”, il 50 nell’espressione “la velocità massima consentita è 50 km/h” e analoghe.
Nel linguaggio corrente, però, spesso si operano scelte e semplificazioni a volte eccessive, rischiando di cadere in ambiguità. È interessante aver riflettuto su questi aspetti, non per trasformarli in oggetto di insegnamento nella scuola primaria, ma per permettere al docente di usare espressioni corrette e di essere consapevoli di quel che si dice e di come si opera.
Vediamo alcune situazioni ricorrenti.

Frase coerente	*Frase di uso comune ma a rigore non coerente*

La misura della lunghezza del lato in cm è 5 La lunghezza del lato è 5 cm	La misura del lato è 5 cm Il lato è 5 cm
La misura dell'ampiezza dell'angolo α in gradi è 45 L'ampiezza dell'angolo α è 45º	L'angolo α misura 45º
La lunghezza della circonferenza è 10π cm La misura della circonferenza è 10π (cm)	La circonferenza è 10π cm La circonferenza misura 10π cm
Il raggio del cerchio ha una lunghezza di 3 dm	Il raggio del cerchio è dm 3
L'area della superficie del terreno è 960 m^2	La superficie del terreno è 960 m^2
Si conoscono le seguenti lunghezze: a = 3 cm; b = 7 cm Si conoscono le seguenti misure in cm: a = 3; b = 7	Si conoscono le seguenti misure: a = 3 cm; b = 7 cm
La misura del perimetro del trapezio è 12 dm La lunghezza del contorno del trapezio è 12 dm La misura in dm del contorno del trapezio è 12	Il contorno del trapezio è 12 dm
Perimetro del triangolo: 3 cm + 4 cm + 5 cm = 12 cm	Perimetro del triangolo: 3 + 4 + 5 = 12 cm
Area del rettangolo: 5 cm × 10 cm = 50 cm^2	Area del rettangolo: 5 × 10 = 50 cm^2

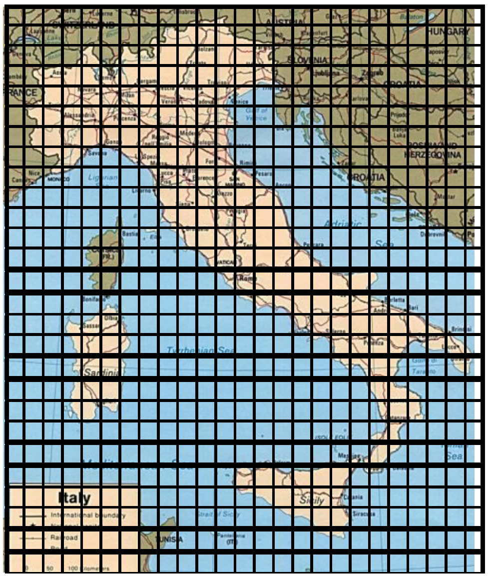
5. Enti geometrici e grandezze

Durante l'insegnamento occorre fare chiarezza tra ente geometrico e sua grandezza caratteristica. La distinzione può emergere ad esempio tra il contorno di un poligono e la sua grandezza che è detta perimetro; tra una parte di piano o superficie e la sua grandezza che è detta area; tra una parte di spazio e la sua grandezza che è detta volume; tra un angolo e la sua grandezza che è detta ampiezza;... Tali termini non sono sinonimi, anche se a volte la lingua comune porta a questa ambiguità; occorre quindi fare chiarezza da questo punto di vista.
Quando si parla di queste grandezze a scuola, spesso si chiede solo di ottenerle formalmente, assai più raramente si impara a misurarle soprattutto nei livelli scolastici successivi a quello primario.
A noi sembra importante che si metta molta attenzione nella fase di insegnamento, prima ancora e più che in quella di apprendimento e di comunicazione matematica; in altre parole, suggeriamo che l'insegnante

dica le cose con chiarezza e correttezza ma che non trasformi questo in una pretesa linguistica e formale artefatta che potrebbe contrastare con la giovane età dell'allievo. Questi impara a far uso della terminologia corretta più per imitazione che per obbligo imposto, obbligo che potrebbe soddisfare per contratto didattico ma senza capirne a fondo la motivazione.
Nel mondo fisico, una misura non è altro che un rapporto tra la grandezza considerata e un'altra grandezza *ad essa omogenea* che viene scelta come unità di misura. "Ad essa omogenea" significa che si misura nello stesso modo, con la stessa tecnica; ad esempio, per misurare le lunghezze, l'unità di misura deve essere anch'essa una lunghezza (di solito il metro); per misurare una durata temporale, l'unità di misura deve essere una durata temporale (di solito un secondo).

La *misura* che si intende effettuare può essere *diretta* o *indiretta*. Un metodo diretto consiste nel sovrapporre o comunque accostare all'oggetto in esame uno strumento tarato che permette la lettura visuale del valore della grandezza; con metodo indiretto intendiamo questo: volendo conoscere una grandezza, ne misuriamo in realtà un'altra (o delle altre) e usiamo delle formule conosciute che collegano le varie grandezze tra di loro. Ovviamente, per fare queste operazioni, occorre che tali formule che si applichino all'oggetto specifico su cui stiamo lavorando.
Ad esempio, tra le misure dirette più diffuse ricordiamo il valutare la lunghezza di un segmento tramite un righello graduato o l'ampiezza di un angolo tramite un goniometro. Il metodo di misurazione resta diretto, anche se a volte è necessario effettuare misure di grandezze non omogenee alla grandezza del misurando. Per esempio, nella determinazione della lunghezza di un oggetto metallico con un micrometro, potrebbe essere necessario misurare la temperatura dell'oggetto (con lo scopo di correggerne l'eventuale dilatazione); questo non modifica il fatto che il rilievo del valore del misurando avviene direttamente tramite il confronto di grandezze omogenee.
Invece, tra le misure indirette ricordiamo ad esempio: ottenere la lunghezza di una circonferenza tramite la conoscenza della lunghezza del suo raggio e di una formula, dell'area di un rettangolo tramite la conoscenza delle lunghezze di due suoi lati consecutivi.
Solitamente, la tecnica fondamentale per la misura delle lunghezze è un metodo diretto, ma come abbiamo osservato con l'esempio della lunghezza di una circonferenza vi sono anche diverse tecniche di misure indirette.
Per l'area di una figura disegnata su un foglio di carta, si può usare un confronto diretto per sovrapposizione, simile a quello che si usa per la misura delle lunghezze. È possibile sovrapporre ad esempio un foglio trasparente di carta quadrettata e contare i quadretti che sono contenuti nella figura sottostante, aggiungendo ad essi delle approssimazioni per quanto riguarda i quadretti non del tutto contenuti.

Da questo esempio, si trae con molta evidenza il fatto che le misurazioni sono tutte, per loro stessa natura, approssimate. Approssimare risulta quindi necessario in tali operazioni di misura e il voler ottenere a tutti i costi una "misura esatta", come si richiede a volte a livello didattico, è una chimera controproducente che contrasta il concetto stesso di misura.

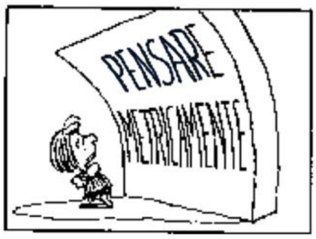


Spesso, per trovare un'area, come quella di una faccia di un parallelepipedo, risulta più immediato invece di contare dei quadretti e approssimare, misurare la lunghezza dei suoi spigoli e usare le formule della geometria che vengono scoperte ed analizzate nella scuola primaria; questo cruciale passaggio non può essere sottovalutato.
Sono diverse le ricerche didattiche che evidenziano come vi sia un contrasto tra le misure dirette (quadrettature, geopiani,…) e indirette (tramite il ricorso alle formule, facendo ad esempio appello a misure lineari) di una superficie e come questo contrasto possa costituire un ostacolo alla comprensione. Si veda ad esempio Iacomella e Marchini (1990), Jaquet (2000) e Chamorro (2001-2002). Nella pratica scolastica, queste due attività, misure dirette e uso di formule, sono spesso contemporanee e confuse e si tende a dare per scontato che se un allievo è in grado di compiere una misura diretta, allora è già pronto a formalizzarne il risultato. Più in generale tali ricerche mettono in evidenza la complessità del tema misura, specie per quanto concerne il suo apprendimento.
A maggior ragione, questo avviene per i volumi. Per il metodo diretto basta immaginare di inserire tanti cubetti in uno scatolone oppure di ricorrere a contenitori graduati che possono essere utilizzati direttamente per misurare i volumi di liquidi o materiali solidi come polveri, sabbia… Il contenitore può

anche essere utilizzato per misurare il volume di un solido, a condizione di disporre di un liquido dentro il quale esso possa essere immerso e con il quale non reagisce. Ad esempio, per misurare il volume di un sasso basta mettere in un cilindro graduato una certa quantità di acqua, misurarne il volume, e poi immergervi il sasso e ripetere la misura di volume: la differenza tra le due misure rappresenta il volume del sasso. Ma spesso risulta molto più agevole anche per i volumi sfruttare altri metodi indiretti che però vanno compresi sia dal punto di vista geometrico che aritmetico.
Naturalmente l'uso di metodi indiretti (come il ricorso a formule) funziona per figure standard (sia superfici, sia volumi) tanto che ad esse, spesso, si riserva l'infelice aggettivo "geometriche" proprio perché non si sa che altri aggettivi usare. Ma per misurare il volume di un sasso o la superficie di un lago sulla carta geografica, misure indirette che usino formule non esistono. Bisogna far capire questo aspetto agli allievi, per poter far apprezzare che *senso* ha fare misure indirette con formule; mentre si tende a fare il contrario: ricorrere sempre e solo a misure indirette, ignorando la vera problematica della misura. Questo atteggiamento metodologico, dovuto ad ostacoli didattici, crea misconcezioni che non si eliminano più, nemmeno nella scuola superiore.
Per il mondo 3D, è importante fare chiarezza sulla distinzione tra due termini molto diffusi: *volume* e *capacità*. Mentre il volume è la grandezza caratteristica dello spazio occupato da un corpo, di solito con il termine capacità si intende la grandezza dello spazio libero all'interno di un corpo cavo, che può essere occupato da altri corpi. Il temine è usato specialmente per recipienti destinati a contenere liquidi o altre sostanze fluide o semifluide. Dal punto di vista fisico e matematico, non fa differenza che lo spazio sia occupato da un corpo solido, un gas o dal vuoto, quindi si preferisce indicare genericamente con il termine volume la grandezza di spazio collegata a corpi fisici, compresa la capacità.
Spesso gli allievi confondono l'uso di termini come *misurare*, *calcolare* e *risolvere*, che invece rappresentano operazioni profondamente diverse tra loro. "Misurare" significa usare degli strumenti e delle tecniche per confrontare, direttamente o indirettamente, l'oggetto considerato con una unità di misura stabilita convenzionalmente. "Calcolare", invece, è un'operazione puramente matematica che si fa ad esempio tramite un algoritmo su numeri, eventualmente ottenuti con un'attività di misura. "Risolvere" è attività caratteristica di una situazione problematica, esercizio, problema, equazione…
Ad esempio, se determiniamo l'area di una superficie contando i quadretti per sovrapposizione, allora stiamo "misurando" l'area; mentre se determiniamo l'area di un rettangolo moltiplicando le lunghezze di due suoi lati consecutivi, ossia utilizzando le formule della geometria, allora stiamo "calcolando" l'area; se invece abbiamo i dati delle misure dei lati di un

triangolo e vogliamo scoprirne l'area dobbiamo "risolvere" il problema di trovare una strategia idonea ed applicarla con successo.
Occorre tener conto che, quando si scrivono i risultati di una misura, occorre sempre specificare sia il numero (rapporto tra grandezza misurata e unità di misura) sia il simbolo convenzionale dell'unità di misura utilizzata, per evitare malintesi dovuti alle diverse unità di misura possibili. Il solo numero non ha significato per quanto concerne le misure. Ciò va esplicitato didatticamente in classe mostrando questa particolare "funzione del numero come misura".
Per convenzione internazionale, accettata da quasi tutti i Paesi del mondo, l'unità di misura delle lunghezze è il *metro*. Il metro è definito come la distanza percorsa dalla luce nel vuoto nell'intervallo di tempo: $\frac{1}{299792458}$ s; il suo simbolo è m.
Nella lingua italiana la parola "metro" viene indicata per indicare due cose ben diverse: sia l'unità di misura delle lunghezze sia il più comune strumento concreto utilizzato per misurare le lunghezze. Su questo punto occorre non fare confusione ed esplicitare anzi tale ambiguità agli allievi, rendendoli consapevoli di ciò.
In un sistema coerente[3] di unità di misura con il metro, l'unità di misura delle aree è il *metro quadrato*: rappresenta l'area di un quadrato il cui lato ha lunghezza che misura 1 m. Il suo simbolo è m^2. In modo analogo, come unità di misura del volume scegliamo il metro cubo, che si indica m^3 e indica il volume di un cubo i cui spigoli hanno la lunghezza di 1 m. Vi è inoltre un sottomultiplo del m^3, e precisamente il dm^3, che è ampiamente usato nella pratica con il nome di *litro*, specialmente per il volume (capacità) dei recipienti. Il suo simbolo è l. In realtà, il litro è stato da tempo abolito ufficialmente, ma continua ad essere assai presente nella vita di tutti i giorni.
Ovviamente, per ogni unità di grandezza, esistono dei multipli e dei sottomultipli. È importante comprendere come passare da multipli a sottomultipli indipendentemente dalla grandezza in oggetto, fornendo significativi mezzi per controllare le conversioni di unità e non dare risalto alla esclusiva memorizzazione per non creare false convinzioni negli allievi.

[3] Un sistema coerente di unità di misura si ottiene quando le sue grandezze ed unità derivate si ricavano come prodotto di grandezze ed unità fondamentali evitando così l'uso di inutili costanti nelle formule. Una unità derivata è quindi *coerente* se essa può essere espressa come prodotto delle potenze delle unità di base con un fattore di proporzionalità unitario.



Tratto da -TORNA A SCUOLA SALLY - Ed. BUR

Il metro, il metro quadrato e il metro cubo sono unità di misura di grandezze diverse ma legate tra di loro in un sistema coerente di unità di misura. La scelta delle unità e delle loro relazioni è frutto di convenzioni per poter comunicare informazioni quantitative tra i vari Paesi.
L’esigenza di uniformare e standardizzare le unità di misura fu sentita da tempi remoti, ad esempio ai tempi dei faraoni egizi, di Carlo Magno e Carlo V. Il primo tentativo veramente significativo di accordo internazionale in questo campo risale al *Trattato del Metro*, firmato a Parigi nel 1875 dai rappresentanti di 17 Paesi, ai quali in seguito se ne aggiunsero molti altri. Questo trattato prevedeva anche la nascita di un’istituzione internazionale tuttora esistente, l’Ufficio Internazionale di Pesi e Misure con sede a Sèvres (Parigi), che periodicamente riunisce scienziati per discutere eventuali modifiche da apportare al sistema di unità di misure.
Il sistema di unità di misura attualmente in vigore prende il nome di Sistema Internazionale di Unità di Misura, abbreviato con la sigla SI, ed è stato introdotto nel 1960, con continue modifiche successive. Il sistema SI è oggi accettato da quasi tutti gli stati del mondo e anche dove non è usato, come negli Stati Uniti d’America o in vari Paesi arabi o dell’America del Sud, viene utilizzato dagli scienziati perché molto più comodo e universalmente compreso.

La XIV Conferenza Generale di Pesi e Misure (1971), dopo essersi basata sui lavori delle precedenti conferenze e di comitati internazionali, adottò come unità fondamentali le seguenti sette grandezze:

Unità SI fondamentali

Grandezza	**Nome**	**Simbolo**
Lunghezza	metro	m
Massa	chilogrammo	kg
Tempo	secondo	s
Intensità di corrente elettrica	ampere	A
Temperatura termodinamica	kelvin	K
Quantità di materia	mole	mol
Intensità luminosa	candela	cd

Da queste derivano altre unità SI, quali l'area, il volume, la velocità, la forza, la resistenza elettrica…
Spesso, quando si esprimono "grandi" o "piccole" grandezze, ci si trova a confronto con numeri "molto grandi" o "molto piccoli".
Sempre la XIV Conferenza Generale dei Pesi e Misure raccomandò l'uso dei prefissi seguenti:

Prefissi SI multipli

Fattore	**Prefisso**	**Simbolo**
10	deca	da
10^2	etto	h
10^3	chilo	k
10^6	mega	M
10^9	giga	G
10^{12}	tera	T
10^{15}	peta	P
10^{18}	esa	E

Prefissi SI sottomultipli

Fattore	**Prefisso**	**Simbolo**
10^{-1}	deci	d
10^{-2}	centi	c
10^{-3}	milli	m
10^{-6}	micro	μ
10^{-9}	nano	n
10^{-12}	pico	p
10^{-15}	femto	f
10^{-18}	atto	a

I prefissi usati per fattori maggiori di 1 derivano dal greco, mentre quelli per numeri minori di 1 derivano dal latino.
Un altro importante sistema oltre a SI è quello *britannico*, tuttora in uso negli Stati Uniti, in Inghilterra e in altri Paesi. Le unità meccaniche fondamentali sono quelle di lunghezza (il piede), di forza (la libbra) e di tempo (il secondo). Ci sono poi molti Paesi che fanno un uso misto a seconda della sostanza; per esempio il latte si misura in litri mentre la benzina in galloni; anzi, questo sistema misto è il più diffuso attualmente al mondo.
Un'altra grandezza geometrica che ha particolare importanza nella scuola primaria è l'ampiezza dell'angolo. Essa si può misurare per via diretta con strumenti tarati come il goniometro, oppure per via indiretta misurando lunghezze, ma questo procedimento è specifico di livelli scolastici successivi a quello primario. Dal tempo dei Babilonesi si ha come consuetudine di misurare gli angoli tramite la numerazione sessagesimale, dove l'unità di misura corrente è il grado, definito come la 360-esima parte dell'angolo giro.
Per misurare il tempo, invece, può essere utilizzato qualunque strumento che sfrutti un fenomeno che si ripete periodicamente; la misura consiste nel contare il numero di volte in cui il periodo si ripete. Tuttavia, la definizione di moto periodico presuppone già la possibilità di misurare intervalli temporali per individuare il periodo dello strumento considerato. Ci troviamo, quindi, in presenza di un circolo vizioso, per uscire dal quale in genere si definisce convenzionalmente periodico un determinato fenomeno. Per esempio si può usare una clessidra, un pendolo di oscillazione, una molla a spirale, …
Tali strumenti svolgono il ruolo di "orologi", ossia riproducono costantemente intervalli di tempo che noi riteniamo essere sempre uguali tra loro.
Per il tempo va inoltre osservato che né la sovrapposizione né il confronto diretto sono possibili. Supponiamo infatti di definire l'unità di misura del tempo come l'intervallo tra un certo istante e un altro; una volta che questi istanti sono passati, quell'intervallo di tempo non esisterà più e non lo possiamo usare come termine di confronto. Mentre per le grandezze geometriche abbiamo sempre la possibilità di ancorare l'unità di misura ad un oggetto fisico e spostarlo nello spazio per operare confronti, non possiamo spostare un campione di misura del tempo, avanti e indietro a nostro piacimento.
Storicamente l'unità di tempo: il "secondo", ancora oggi in uso, è stato scelto come 1/86400 del giorno solare medio, definito sulla base del tempo di rotazione della Terra.
La precisione che si riscontra con le frequenze di onde elettromagnetiche ha però reso possibile una nuova definizione più rigorosa del secondo. In particolare, la fisica atomica ha fornito un campione di tempo più comodo e

preciso: è stata utilizzata la frequenza di vibrazioni di uno specifico nuclide, il cesio 133. Dal 1967 il secondo viene definito come la durata di 9192631770 oscillazioni della radiazione corrispondente alla transizione entro i due livelli iperfini dell'atomo di cesio 133 nello stato fondamentale. Negli ultimi anni l'interesse dei metrologi si è orientato verso il maser a idrogeno che, per la sua stabilità, promette di raggiungere precisioni dell'ordine di una parte su 1013, pari a un secondo ogni 300000 anni.[4]

6. Incertezze di misura

Come abbiamo già detto in precedenza, le misure non possono essere ingenuamente "esatte" essendo per loro natura affette da una incertezza intrinseca, che dipende dalla tecnica, dallo strumento, dall'unità di misura, dall'oggetto che si misura. Il livello di incertezza tollerabile dipende dallo specifico problema che la misura ci aiuta a risolvere; risulta quindi importante sapere quanto è accurata ogni misura che effettuiamo.
Le cause di incertezza nelle misure possono essere dovute a:
- *errori banali*; l'operatore che conduce la misura non sa usare lo strumento, si confonde in una lettura, sbaglia i calcoli in una misura indiretta…; in questo caso la misura non è poco accurata, ma sbagliata e va rifatta; tipico errore di questo tipo, ricorrente in allievi dei primi anni di scuola primaria, è di non considerare lo zero quando usano strumenti come un righello graduato per misurare le lunghezze o un goniometro per misurare le ampiezze; probabilmente questo avviene perché gli studenti sono maggiormente abituati a considerare il numero nelle sue "funzioni cardinale e ordinale", dove si è soliti partire dall'unità e non dallo zero e seguono quindi la stessa logica anche per il numero inteso con la "funzione di misura", anche se in questo caso è necessario disporre l'inizio della graduazione dello strumento in corrispondenza della tacca coincidente con lo zero e non dell'uno;
- *incertezze strumentali*; usando uno strumento tarato, come ad esempio un metro a nastro, operiamo un confronto tra l'oggetto da misurare e le tacche incise sullo strumento che si suppongono uguali a multipli o sottomultipli dell'unità di misura; la costruzione dello strumento, la sua taratura e la nostra lettura sono sottoposte ad incertezza strutturale, ìnsita nello strumento stesso; queste incertezze sono previste dalle condizioni normali d'uso e risultano minori della distanza tra due tacche consecutive dello strumento;

[4] Il maser (microwave amplification by stimulated emission of radiation) è simile a un laser ma opera nello spettro magnetico a livello di microonde. Il primo maser è stato costruito in USA negli anni '50.

normalmente, gli strumenti di misura abbastanza sofisticati riportano bene in evidenza qual è la loro incertezza strumentale;
- *incertezze dell'oggetto da misurare*; quando consideriamo un oggetto reale lo assimiliamo ad una buona approssimazione di un oggetto geometrico ideale; così, ad esempio, un tavolo, ipotizziamo che sia un rettangolo, supponendo che i suoi lati siano a coppie paralleli e privi di asperità e irregolarità, inoltre ipotizziamo che i suoi angoli siano retti; se ciò non è proprio vero, noi misuriamo qualcosa di diverso dal tavolo ideale e ciò è dovuto all'irregolarità dell'oggetto stesso.
Come errore assoluto si può prendere la sensibilità dello strumento (ad esempio, l'errore massimo associato ad un buon uso di un buon metro a nastro è 0,5 mm), oppure la semidispersione massima (la differenza fra il valore massimo e il valore minimo di un numero statisticamente significativo di misure, diviso per due). In genere si prende la loro media come valore migliore di più misure.
Di grande importanza pratica per comprendere l'accuratezza di una misura è il rapporto tra l'incertezza di una misura e il valore assoluto della misura stessa, chiamato *errore relativo*. In effetti, se misuriamo la lunghezza di una stanza con un'incertezza di 0,5 mm, abbiamo sicuramente fatto una misura estremamente accurata; se invece misuriamo il diametro di un capello con la stessa incertezza, abbiamo effettuato una misura davvero poco accurata. Mentre l'errore massimo è lo stesso nei due casi presi in considerazione, l'errore relativo è assai diverso. Dunque, la valutazione dell'errore dipende dal contesto.
Va inoltre ricordato che i risultati delle misure, sia dirette che indirette, vengono riportati con un numero di cifre significative tale che l'incertezza di misura possa influire solo sull'ultima cifra significativa. Ad esempio se il tavolo è lungo 80 cm con l'incertezza di 2 mm, si scrive che è lungo 800 mm, oppure 80,0 cm, evidenziando così che l'incertezza è dell'ordine del millimetro.

7. Eccesso di situazioni didattiche e carenza di situazioni a-didattiche

Concludiamo questa presentazione facendo riferimento a uno dei più importanti argomenti introdotti fin dagli anni Ottanta dal grande ricercatore francese Guy Brousseau, la "teoria delle situazioni". Ci serviremo di Brousseau (1986), D'Amore (1999), D'Amore, Sbaragli (2010 in questa stessa collana).
In tale teoria, le *situazioni* rappresentano un insieme di relazioni stabilite in modo esplicito o implicito tra l'insegnante, l'allievo (o un gruppo di allievi) ed elementi al contorno (strumenti o materiali), avendo come scopo quello

di far sì che gli studenti apprendano, cioè costruiscano una certa conoscenza stabilita in precedenza.
Si individuano tre tipologie diverse di *situazioni.*

Situazione didattica è una situazione che l'insegnante crea tenendo conto dello stato cognitivo dei suoi allievi, delle esigenze del programma, dell'ambiente; egli la propone ai propri allievi in modo esplicito, intervenendo attivamente nel loro processo di apprendimento, dichiarando quello che vuole ottenere, spiegando ogni dettaglio, dichiarando che cosa si deve fare, dire, come devono risolvere, che cosa devono scrivere, che cosa lui si aspetta che essi dicano o facciano… L'insegnante si sostituisce allo studente, rendendo vincente il contratto didattico: l'allievo non è così impegnato a imparare la matematica, ma a imparare quali sono le attese dell'insegnante, esplicite ma soprattutto implicite.

Situazione a-didattica è una situazione che l'insegnante crea tenendo conto dello stato cognitivo dei suoi allievi, delle esigenze del programma, dell'ambiente; egli la propone in modo indiretto, anzi, se è possibile, non la propone affatto, ma fa sì che sia necessario entrarvi. L'insegnante ha una funzione di regista e non di mediatore, si limita ad osservare, indirizzare, dirigere la discussione, affidando così agli allievi la gestione della situazione. Gli studenti sanno che lo scopo dell'attività è di apprendimento di qualche cosa, ma non sanno quale sia il sapere in gioco; sta quindi agli allievi accettare la responsabilità della situazione proposta, impegnarsi, discutere, scoprire, progettare, risolvere, validare e socializzare le proprie scoperte. Quando si giunge ad una conoscenza condivisa, l'insegnante cessa di avere una pura funzione di regista, riacquistando la funzione di insegnante tramite l'istituzionalizzazione del sapere raggiunto, riconoscendogli uno status teorico ufficiale di spendibilità, dandogli il nome con il quale la società lo riconosce. In questo tipo di situazione, il contratto didattico non ha un ruolo importante come nelle precedenti situazioni, dato che l'insegnante non dichiara preliminarmente che cosa vuole ottenere dagli allievi ma affida la costruzione della conoscenza alla loro stessa responsabilità
Confrontando le situazioni a-didattiche con quelle didattiche si deduce che l'atteggiamento d'aula e l'impegno richiesti allo studente sono ben diversi: nella situazione a-didattica si chiede all'allievo di attivarsi, mentre nella situazione didattica si chiede all'allievo di riprodurre ciò che ha detto l'insegnante; c'è chi li definisce due mestieri di allievo diversi.

Situazione non didattica è, infine, una situazione nella quale non ci sono traguardi cognitivi da raggiungere, né espliciti né impliciti, ma solo attività da svolgere ed effettuare. Non è detto che l'allievo non impari comunque qualche cosa.

Da queste considerazioni possiamo osservare che:
- nella situazione didattica lo studente non impara la matematica ma a soddisfare (quelle che crede essere) le aspettative del docente;
- quello che si riesce a mettere sotto forma di situazione a-didattica risulta vincente nell'apprendimento; pur essendo una situazione di apprendimento genericamente più lenta, permette un *apprendimento concettuale*; è attraverso una costruzione di situazioni a-didattiche in aula che si arriva ad una vera e propria conoscenza, capace anche di *transfer cognitivo*.

Tuttavia, la situazione didattica è sicuramente la più presente nelle aule scolastiche dato che la situazione a-didattica richiede un certo coraggio, una grande professionalità, molta pazienza e grandi capacità di osservazione. La realizzazione di pratiche operative di misura fa sì che la gestione della classe e del tempo sia costosa, per cui l'insegnante tende a sostituirle con evocazioni o con pratiche ostensive. La situazione a-didattica richiede allo studente di *osare*, mettendo in gioco le proprie convinzioni e le proprie conoscenze. Questa idea dell'apprendimento come rischio personale, come impegno, come implicazione diretta dell'allievo è un po' il cardine attorno al quale ruota tutta l'impostazione che stiamo cercando di descrivere in questo progetto, e che si manifesta con la rottura (voluta) del contratto. «La necessità di questa rottura potrebbe essere riassunta dal seguente aforisma: *Credimi*, dice il maestro all'allievo, *osa utilizzare il tuo proprio sapere e imparerai*» (Sarrazy, 1995, nella trad. it. a p. 147).

Per quanto riguarda il tema della misura, la maggioranza delle situazioni che l'insegnante propone per il loro apprendimento è didattica e non a-didattica, con il risultato che numerose ricerche evidenziano un fallimento nell'apprendimento di questo argomento. Quando si tratta di misura, spesso l'insegnante propone semplicemente *una* tecnica, *un* algoritmo, dando importanza alla memorizzazione e alla manipolazione di *una* formula e così lo studente impara che cosa deve applicare, che cosa deve moltiplicare, come deve risolvere situazioni standard, ma non il *senso* del sapere in gioco.

L'insegnante dovrebbe invece creare "buone situazioni" per far raggiungere agli allievi la costruzione di apprendimento significativo, dando attenzione ai processi di misurazione effettivi e non fittizi, alla realizzazione di stime di misure, all'uso dei processi di misurazione per la risoluzione di problemi, alla determinazione dell'ordine di grandezza di oggetti comuni…

In Chamorro (2001-2002, pp. 66-67) si sostiene che: «Abbiamo visto che nei manuali scolastici c'è un buon numero di esercizi che sviluppano usi e formulazioni che hanno una chiara finalità didattica, ma non in relazione al concetto principale enunciato – la misura – bensì ad un oggetto nascosto: l'aritmetica. (…) Nella scuola, si sviluppa in modo privilegiato l'aspetto relativo al calcolo impoverendo molto la reale risoluzione dei problemi di misura. Il *fenomeno* che abbiamo chiamato *aritmetizzazione della misura* ha invaso tutti gli aspetti di questa, sia nelle istituzioni scolastiche, sia nella

vita reale. (…) Di conseguenza, possiamo affermare che*: esiste una colonizzazione della misura da parte dell'aritmetica*». L'Autrice continua sostenendo: «Nell'insegnamento della misura si assiste ad un marcato sfasamento tra la pratica e la cultura didattica, tra ciò che l'insegnante crede di aver fatto e ciò che realmente ha fatto in classe. Esiste una forte contraddizione tra quello che l'insegnante vorrebbe fare (un processo sperimentale) e quello che realmente fa (un processo algoritmizzato e aritmetizzato)» (p. 70). In questo lavoro sono riportate esperienze realizzate nella scuola primaria, allo scopo di contribuire alla realizzazione di sapienti situazioni a-didattiche e ingegnerie tese a eliminare o almeno contenere le ben note difficoltà di apprendimento.
In queste situazioni, lo studente deve quindi essere messo nella condizione di rompere continuamente il contratto didattico, di essere capace di osare sfruttando le proprie conoscenze, al di là delle attese dell'insegnante. Per il tema della misura, argomento di congiunzione tra le scienze sperimentali e la matematica, la cosa è possibile perché belle esperienze e attività molto coinvolgenti non mancano certamente.

Segnaliamo al Lettore interessato che esistono molti stimolanti testi che riassumono la storia dello sviluppo delle unità di misura nei secoli e lo stato attuale degli accordi internazionali a questo proposito; di questi testi ce ne sono numerosissimi. Mi limito qui a ricordarne solo alcuni, quelli dei quali mi sono principalmente servita:
Fazio M. (1985). *Dizionario e manuale delle unità di misura*. Bologna: Zanichelli.
Melaragno M. (1989). *Dizionario delle unità di misura*. Padova: Muzzio.
Robinson A. (2007). *Misure*. Milano: Touring Club Italiano.

Bibliografia

Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*. 7, 2, 33-115.
Chamorro M.C. (1997). *Estudio de las situaciones de enseñanza de la medida en la escuela elemental.* Tesi di dottorato, UNED.
Chamorro M.C. (2001-2002). Le difficoltà nell'insegnamento-apprendimento delle grandezze nella scuola di base. *La matematica e la sua didattica*. I parte: 4, 2001, 332-351; II parte: 1, 2002, 58-77.
D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2006). *Area e perimetro. Aspetti concettuali e didattici.* Bologna: Pitagora.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I., Marazzani I., Sbaragli S. (2008). *Difficoltà nell'apprendimento della matematica. Il punto di vista della didattica*. Trento: Erickson.

D'Amore B., Sbaragli S. (2010). *Principi di base di didattica della matematica*. Trento: Erickson.

Fischbein E. (1993) The theory of figural concepts. *Educational Studies in Mathematics*. 24, 139-162.

Godino D.J. (2002). Prospettiva semiotica della competenza e della comprensione matematica. *La matematica e la sua didattica*. 4, 434-450.

Iacomella A., Marchini C. (1990). Riflessioni sul problema della misura. *Periodico di matematiche.* 66, VI, 4, 28-52.

Jaquet F. (2000). Il conflitto area-perimetro. *L'educazione matematica*. I parte: 2, 2, 66-77; II parte: 2, 3, 126-143.

Maier H. (1993). Problemi di lingua e di comunicazione durante le lezioni di matematica. *La matematica e la sua didattica*. 1, 69-80.

Maier H. (1998). L'uso di mezzi visivi nelle lezioni di geometria. *La matematica e la sua didattica.* 3, 271-290.

Peano G. (1894). Sui fondamenti della geometria. *Rivista di matematica*. IV, 51-90. (Su *Opere Scelte*, Roma, 1959, III).

Piaget J., Inhelder B. (1971). *Lo sviluppo delle quantità fisiche nel bambino*. Firenze: La Nuova Italia.

Piaget J., Inhelder B., Szeminska A. (1976). *La geometria spontanea del bambino*. Firenze: Giunti Barbèra.

Poincaré H. (1902). *La science et l'hipothèse*. Paris: Flammarion.

Sarrazy B. (1995). Le contrat didactique. *Revue française de pédagogie*. 112, 85-118. [Trad. it.: *La matematica e la sua didattica.* 1998. 2, 132-175].

Sbaragli S. (2006). La capacità di riconoscere "analogie": il caso di area e volume. *La matematica e la sua didattica*. 2, 247-285.

Sbaragli S., Cottino L., Gualandi C., Nobis G., Adriana Ponti A., Ricci M. (2008). *L'analogia, aspetti concettuali e didattici. Un'esperienza in àmbito geometrico.* Roma: Armando Armando.

van Hiele P. M. (1986). *Structure and insight. A theory of Mathematics Education*. Orlando (USA): Academic Press.